

На правах рукописи



Никитин Андрей Витальевич

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ И ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ В КАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ**

01.02.04. – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Чебоксары – 2015

Работа выполнена на кафедре математического анализа, алгебры и геометрии
ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет
им И. Я. Яковлева»

Научный руководитель: **Миронов Борис Гурьевич,**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Шашкин Александр Иванович,**
доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета прикладной математики, информатики и механики
ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет»

Меньшова Ирина Владимировна,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ФГБУН
«Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики» РАН

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Тульский государственный университет»

Защита состоится: 17 сентября 2015 г. в 13:00 часов на заседании диссертационного совета
Д 212.300.02 при ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева», 428000,
г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38, ауд. 406

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Чувашского государственного педагогического университета им И.Я. Яковлева

Электронная версия автореферата размещена на сайте ВАК Министерства образования и науки Российской Федерации <http://vak2.ed.gov.ru> и на официальном сайте ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им И. Я. Яковлева» (www.chgru.edu.ru).

Автореферат разослан 17 июля 2015 года

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ. – мат. наук, доцент



С.В. Тихонов

Актуальность темы. В современном машиностроении, оборонной промышленности часто и активно используются анизотропные и неоднородные материалы, прочностным свойствам которых предъявляются повышенные требования. В качестве примера можно указать стволы артиллерийских орудий, цилиндры гидравлического пресса, и т.д.

Изучение совокупности свойств и качеств последних несомненно является важным и актуальным.

В теории пластичности неоднородность материала характеризуется зависимостью предела текучести от координат точек тела. На неоднородность материала могут влиять следующие факторы: температура, радиационное облучение, ударные воздействия и т.д.

Новые результаты, учитывающие влияние анизотропии и неоднородности на напряженно-деформированное состояние различных тел и конструкций, а также построение новых аналитических решений в канонических областях с угловыми точками границы являются востребованными в современном мире.

Степень разработанности. В середине XX века В. Ольшак и его школа дали толчок развитию теории пластичности неоднородных тел. В. Ольшак, В. Урбановский, Я. Рыхлевский сделали обзор «Теория пластичности неоднородных тел», в котором описаны работы, выполненные к середине 50-60 годам прошлого века.

В работе Хилла была изучена неоднородность, вызванная упрочнением материала.

Задача о сдавливании неоднородного пластического слоя рассмотрена в работах А. А. Ильюшина, М. А. Задояна. Зависимость механических свойств твердых тел от радиоактивного облучения была изучена А. А. Ильюшиным, Ю. И. Ремневым, В. С. Ленским, П. М. Огибаловым, А. Г. Горшковым.

А. Н. Андреева и Ю. В. Немировский в своей монографии решили различные задачи по анизотропным пластинам и оболочкам. А. И. Кузнецов рассматривал задачи кручения неоднородных пластических цилиндрических стержней. Он предположил, что предел текучести зависит от координат точки.

Метод малого параметра широко применялся в задачах определения напряженно-деформированного состояния различных тел. Так, например, в работах Л. В. Ершова и Д. Д. Ивлева рассмотрен большой круг упругопластических задач с применением данного метода. А. П. Соколов первым решил упругопластическую задачу о двусном растяжении тонкой пластины с круговым отверстием. При решении задач пластической неоднородности Б. А. Друянов также использовал выше указанный метод. Он рассмотрел задачи о вдавливании жестких штампов в идеально пластическое неоднородное полупространство и полосу.

Е. А. Целистова, И. П. Григорьев исследовали влияние неоднородности на напряженное состояние слоя из идеально пластического материала, сжатого шероховатыми плитами.

Упругопластические задачи для плоских неоднородных тел, ослабленных отверстием рассмотрел С. В. Тихонов. Упругопластическое состояние неоднородной плоскости, ослабленных различными видами отверстий при двусном растяжении рассмотрены в работах П. Н. Кузнецова.

Составные и толстостенные трубы рассматривались в работах Н. М. Беляева, А. А. Ильюшина, А. П. Кержаева, А. В. Ковалева, А. Н. Спорыхина, Л. В. Ершова, П. М. Огибалова, В. В. Соколовского, Н. Д. Тарабасова, Д. А. Ивлева, С. О. Фоминых и др.

Упругопластические задачи с учетом различных видов анизотропии рассматривались в работах: Б. Д. Анина, М. Т. Алимжанова, Г. И. Быковцева, А. М. Васильевой, С. А. Вульман, А. Г. Гениева, Л. В. Ершова, В. Г. Зубчанинова, Д. Д. Ивлева, Д. А. Ивлева, А. А. Ильюшина, А. Ю. Ишлинского, Л. М. Качанова, А. В. Ковалева, Н. М. Матченко, И. Н. Матченко, Б. Г. Миронова, А. Надаи, В. Прагера, Б. Е. Победри, В. В. Соколовского, Т. Д. Семьикиной, А. Н. Спорыхна, Л. А. Толоконникова, Р. Хилла, А. И. Шашкина, Г. П. Черепанова, В. О. Геогджаева и др.

Известно, что при построении уточненных теорий оболочек и пластинок требуется знать напряженно-деформированное состояние упругой полуполосы. Поэтому эта задача теории упругости на протяжении многих лет привлекала внимание многочисленных исследователей.

При решении ее использовались различные подходы. Отметим некоторые из них. Задача о симметрично нагруженной полуполосе, заделанной по торцу, рассматривалась И.И. Воровичем и В. В. Копасенко. Они свели эту задачу к интегральному уравнению Фредгольма первого порядка с неподвижной особенностью относительно нормального напряжения в заделке. В некоторой степени, как отмечается авторами, эта особенность усложняет исследование уравнения, а также численное решение. Л.А.Агаловян и Р.С.Геворкян решают задачу для полуполосы со свободными от напряжения продольными сторонами, когда на торце заданы перемещения. Решение сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что полученная система вполне регулярна. При решении конкретной задачи учитывался лишь первый член асимптотики, что не дает возможность судить о скорости сходимости процесса, так как В. Т. Гринченко показал, что из регулярности бесконечной системы не следует равномерная сходимость последовательности решений краевых задач, полученных на основе метода редукции. В. В. Копасенко при решении системы уравнений бесконечного порядка предлагает использовать свой метод. Л.П. Трапезников применил вариационный метод. Теокарис при решении задачи о полуполосе со свободными продольными сторонами, на торце которой действует сосредоточенная сила, использовал энергетический метод. М.И. Гуссейн–Заде исследовала условия, которым должны удовлетворять задаваемые на конце напряжения или перемещения, чтобы решения затухали при удалении от этого конца. Большое значение имеют полученные точные решения этой задачи и в связи с широкими возможностями практического использования полученных результатов. Класс точных решений фактически ограничивается функциями Фадля-Папковича, описывающими полуполосу со свободными продольными кромками и торцом, нагруженным самоуравновешенной системой нормальных и касательных сил. В работе В. Л. Инденбом и В.И. Даниловская показали, что продолжение решения через продольные кромки полуполосы открывают новые пути решения задачи и позволяет, в частности, строить новые полные системы точных решений. В. И. Даниловская задачу об определении температурных напряжений в прямоугольной пластинке с помощью метода М.М.Филоненко–Бородича свела к одной бесконечной системе. Исследовала структуру этой системы и построила её решение. Этот подход был реализован в при определении температурных напряжений в упругом параллелепипеде.

Целью работы является изучение упругопластического состояния толстых неоднородных круговых труб, которые находятся под внутренним давлением, изучение влияния неоднородности на изменение упругопластической границы, а также аналитическое решение краевой задачи для полуполосы, защемлённой по продольным сторонам.

Задачи исследования. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- 1) исследование упругопластического напряженного состояния толстостенной неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления при различных видах неоднородности
- 2) исследование упругопластического деформированного состояния толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления при различных видах неоднородности;
- 3) исследование предельного состояния многослойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, в случае, когда каждый слой обладает своими параметрами анизотропии;
- 4) исследование предельного состояния многослойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, в случае, когда каждый слой обладает своими параметрами неоднородности;
- 5) построение точного аналитического решения краевой задачи теории упругости для полуполосы (прямоугольника), защемленной по продольным сторонам;

Научная новизна состоит в определении упругопластического состояния неоднородных труб и построении точного аналитического решения задачи для полуполосы, защемленной по продольным сторонам.

Методология и методы исследования. В части диссертации, посвященной теории пластичности, напряженно-деформированное состояние определяется с помощью приближенно – аналитического метода, который берет свое начало от работ Пуанкаре. Д.Д. Ивлев и Л.Л. Ершов развили данный метод применительно к упругопластическим задачам. В части диссертации, посвященной теории упругости, решения ищутся в виде разложений по функциям Фадля-Папковича. Эти функции не образуют базис на отрезке, но образуют его на римановой поверхности логарифма. Теория базиса функций Фадля-Папковича разработана около 10 лет назад.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации позволяют оценить влияние неоднородности материала на упругопластическое состояние труб. Аналитические решения можно использовать в прочностных расчетах, для тестирования численных методов. На основе полученных решений могут быть найдены решения более сложных задач, в том числе и смешанных.

Степень достоверности работы. Достоверность обусловлена непротиворечивостью с результатами исследований других авторов, строгостью постановки краевых задач, основана на использовании строгих математических методов исследования, апробированных моделей механического поведения тел.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации и работа в целом докладывались: на семинарах по механике деформируемого твердого тела под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора, Ивлева Д. Д. (г. Чебоксары, ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, 2011-2012 гг.); на семинарах по механике деформируемого твердого тела под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора, Миронова Б. Г. (г. Чебоксары, ЧГПУ им. И.Я. Яковлева, 2011-2015 гг.); на семинарах по математике под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора, Орлова В. Н. (г. Чебоксары, ЧГПУ им. И.Я. Яковлева, 2014-2015 гг.); на научно-практических конференциях докторантов, аспирантов и соискателей по итогам научно-исследовательской работы 2011-2015гг. (г. Чебоксары, ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, 2011-2015 гг.); на XIV международной заочной научно-практической конференции «Научная Дискуссия: Вопросы математики, физики, химии, биологии» (г. Москва, 2014 г.); на международной научно-практической конференции «Современные проблемы, материалы, механики, информатики» (г. Тула 2013 г.); на XVII международной научно-практической конференции «Естественные и Математические науки в современном мире» (г. Новосибирск, 2014 г.); на международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий» (г. Чебоксары 2013 г.); на VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тел (г. Чебоксары 2014 г.); на XIII международной научно-практической конференции "Естественные и Математические науки в современном мире" (г. Новосибирск, 2013 г.); на VIII региональной научно – практической конференции студентов, аспирантов, ученых и специалистов «Наука, Экономика, Общество» (г. Воскресенск, 2014 г.); на III международной научно-практической конференции «Приоритетные направления развития науки и образования» (г. Чебоксары, 2014 г.); на X международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (г. Алушта, 2014 г.);

На защиту выносятся следующие положения:

- 1) Определение упругопластического напряженного состояния толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления при различных видах неоднородности;
- 2) Определение упругопластического деформированного состояния толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления при различных видах неоднородности;
- 3) Определение предельного состояния многослойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, в случае когда каждый слой обладает своими параметрами анизотропии;
- 4) Определение предельного состояния многослойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, в случае когда каждый слой обладает своими параметрами неоднородности;
- 5) Точное аналитическое решение краевой задачи теории упругости для полуполосы (прямоугольника), защемленной по продольным сторонам;

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 20 научных работах, из них 10 работ опубликованы в рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки РФ.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, содержащих 8 параграфов, заключения и списка используемой литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, приводится обзор публикаций по исследуемой проблеме, формулируются основные положения, выносимые на защиту, определяются цели исследования, приводится структура диссертационной работы.

Глава первая посвящена исследованию упругопластического состояния неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления при различных видах неоднородности.

В § 1.1 исследуется напряжённое состояние неоднородной трубы и граница раздела упругой и пластической областей.

Рассмотрена толстостенная труба радиусов a , b ; $a < b$, находящаяся под действием внутреннего давления p (рисунок 1).

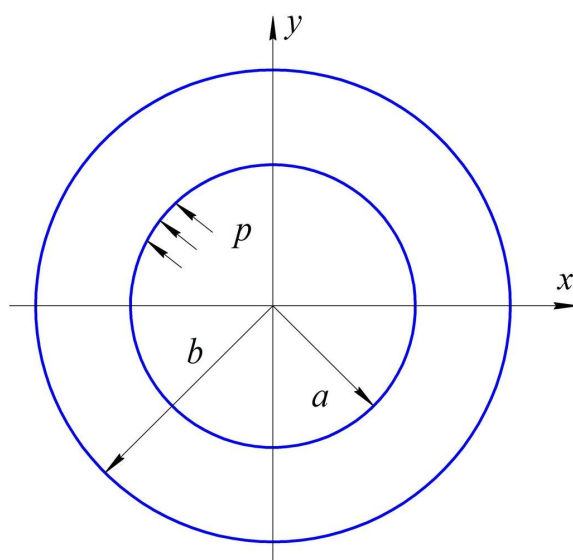


Рисунок 1

Предполагается, что часть трубы находится в пластической области, другая часть – в упругой. В пластической области напряжённое состояние имеет вид:

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 = k_{xy}^2, \quad k_1, k_2, k_3 - const, \quad (1)$$

В п.1 данного параграфа предполагается, что $k_{xy} = k_0 + \delta(cx + dy)$, k_0 , c , $d - const$, где δ – малый безразмерный параметр. Разложение по малому безразмерному параметру является основой решения:

$$k_1 = k^0 + \delta k'_1, \quad k_2 = k^0 + \delta k'_2, \quad k_3 = \delta k'_3, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(I)}\delta + \sigma_{ij}^{(II)}\delta^2 + \dots,$$

$$\rho_s = \rho_s^{(0)} + \rho_s^{(I)}\delta + \rho_s^{(II)}\delta^2 + \dots$$

Согласно известному решению Д. Д. Ивлева об упругопластическом состоянии толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления определены компоненты напряжений в нулевом приближении.

В первом приближении компоненты напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)p} = & -R' \left[\frac{\alpha}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) - 1 \right] \cos(2\theta + \zeta) + \\ & + (c \cos(\theta) + d \sin(\theta)) \left(-\frac{\alpha^2}{\rho} + \rho \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^{(I)p} = & -R' \left[\frac{\alpha}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) + 1 \right] \cos(2\theta + \zeta) + \\ & + (c \cos(\theta) + d \sin(\theta)) \left(-\frac{\alpha^2}{\rho} + 3\rho \right), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta}^{(I)p} = & R' \left[\frac{\alpha}{\rho} \left(\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) - 1 \right] \sin(2\theta + \zeta) + \\ & + (c \sin(\theta) - d \cos(\theta)) \left(-\frac{\alpha^2}{\rho} + \rho \right). \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)e} = & \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^4 - 1} \left(\rho - \frac{\beta^4}{\rho^3} \right) (c \cos(\theta) + d \sin(\theta)) + \\ & + R' \frac{2\beta^6 \rho^2 - 2\beta^4 \rho^4 - \beta^6 + 2\beta^4 \rho^2 - \beta^2 \rho^4 - 3\beta^4 + 4\beta^2 \rho^2 - \rho^4}{(\beta^6 - 3\beta^4 + 3\beta^2 - 1) \rho^4} \cdot \\ & \cdot \cos(2\theta + \zeta) \left(\sqrt{3} \alpha \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + 1 \right) - \\ & - 2\beta^4 R' \frac{(\beta^6 \rho^2 - \rho^4 - \beta^2 + \rho^2)}{(\beta^6 - 3\beta^4 + 3\beta^2 - 1) \rho^4} \cos(2\theta + \zeta) \cdot \\ & \cdot \left(\sqrt{3} \alpha \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - 1 \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^{(I)e} = & \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^4 - 1} \left(3\rho + \frac{\beta^4}{\rho^3} \right) (c \cos(\theta) + d \sin(\theta)) + \\ & + R' \frac{2\beta^6 \rho^4 - 6\beta^2 \rho^6 + \beta^6 + \beta^2 \rho^4 - 2\rho^6 + 3\beta^4 + \rho^4}{(\beta^6 - 3\beta^4 + 3\beta^2 - 1) \rho^4} \cdot \\ & \cdot \cos(2\theta + \zeta) \left(\sqrt{3} \alpha \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + 1 \right) + \\ & + 2R' \frac{(-\beta^4 \rho^4 + 3\beta^2 \rho^6 + \beta^6 - \rho^6)}{(\beta^6 - 3\beta^4 + 3\beta^2 - 1) \rho^4} \cos(2\theta + \zeta) \cdot \\ & \cdot \left(\sqrt{3} \alpha \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - 1 \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta}^{(I)e} = & \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^4 - 1} \left(\rho - \frac{\beta^4}{\rho^3} \right) (c \sin(\theta) - d \cos(\theta)) + \\ & + R' \frac{\beta^6 \rho^2 + 2\beta^4 \rho^4 - 3\beta^2 \rho^6 - \beta^6 + \beta^4 \rho^2 + \beta^2 \rho^4 - \rho^6 - 3\beta^4 + 2\beta^2 \rho^2 + \rho^4}{(\beta^6 - 3\beta^4 + 3\beta^2 - 1) \rho^4} \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sin(2\theta + \zeta) \left(\sqrt{3}\alpha \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + 1 \right) + \\
& + R' \frac{(\beta^6 \rho^2 + 2\beta^4 \rho^4 - 3\beta^2 \rho^6 + 2\beta^6 + \beta^4 \rho^2 + \rho^6)}{(\beta^6 - 3\beta^4 + 3\beta^2 - 1) \rho^4} \sin(2\theta + \zeta) \cdot \\
& \cdot \left(-\sqrt{3}\alpha \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - 1 \right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Определена граница упругопластической области в первом приближении:

$$\begin{aligned}
\rho_s^{(I)} = \frac{1}{4} (\sigma_\theta^{(I)e} - \sigma_\theta^{(I)p}) = \frac{1}{4} & \left[\left(\frac{\alpha^2 - 1}{\beta^4 - 1} (3 + \beta^4) + (\alpha^2 - 3) \right) (c \cos(\theta) + d \sin(\theta)) + \right. \\
& + R' \frac{3\beta^6 - 5\beta^2 - 1 + 3\beta^4}{(\beta^6 - 3\beta^4 + 3\beta^2 - 1)} \cos(2\theta + \zeta) \cdot \\
& \cdot \left(\sqrt{3}\alpha \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + 1 \right) + \\
& + 2R' \frac{(-\beta^4 + 3\beta^2 + \beta^6 - 1)}{(\beta^6 - 3\beta^4 + 3\beta^2 - 1)} \cos(2\theta + \zeta) \cdot \\
& \cdot \left(\sqrt{3}\alpha \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \alpha \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - 1 \right) + \\
& \left. + R' \left(\alpha \left(\cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right) + 1 \right) \cos(2\theta + \zeta) \right].
\end{aligned} \tag{8}$$

В п. 2 неоднородность материала трубы в пластической области принята в виде:

$$k_{xy} = k_0 + \delta \left[\frac{(x + A)^2}{\bar{a}^2} + \frac{(y + B)^2}{\bar{b}^2} \right], \quad k_0, \bar{a}, \bar{b}, A, B - const, \tag{9}$$

где δ – малый безразмерный параметр.

В первом приближении в пластической и упругой области найдены компоненты напряжения, а также граница упругопластической области.

$$\begin{aligned}
\rho_s' = \frac{1}{4} (\sigma_\theta^{(I)e} - \sigma_\theta^{(I)p}) = \frac{1}{4} & \left[2 \frac{(A^2 b^2 + B^2 a^2) \ln(\alpha) (\beta^2 + 1)}{a^2 b^2 (\beta^2 - 1)} - \right. \\
& + \frac{2(\alpha^2 - 1)(\beta^4 + 3)}{(\beta^4 - 1)} \left(\frac{A \cos(\theta)}{a^2} + \frac{B \sin(\theta)}{b^2} \right) - \\
& - \frac{\alpha R'}{3} \cdot \frac{(\beta^8 - 10\beta^4 + 4\beta^6 + 4\beta^2 + 1)}{a^2 b^2 \left(6 - 4\beta^2 - \frac{4}{\beta^2} + \beta^4 + \frac{1}{\beta^4} \right) \beta^4} \cdot \\
& \cdot \left(\sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \left[3\sqrt{3} a^2 b^2 \cos(2\theta - \zeta) - \alpha^2 (a^2 - b^2) \cos(2\theta) \right] + \right. \\
& \left. + 3b^2 \cos(2\theta + \zeta) \left[a^2 \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - \alpha \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha R'}{3} \cdot \frac{(\beta^8 - 2\beta^6 + 4\beta^4 - 4\beta^2 + 1)}{a^2 b^2 \left(6 - 4\beta^2 - \frac{4}{\beta^2} + \beta^4 + \frac{1}{\beta^4}\right) \beta^4}. \\
& \cdot \left[\cos(2\theta)(a^2 - b^2) \left[3\alpha^3 \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \sqrt{3}\alpha^3 \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) - 3 \right] + \right. \\
& \quad + 6a^2 b^2 \cos(2\theta + \zeta) \left[\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) + \cos(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \right] \left. \right] + \\
& \quad + \frac{2\alpha^2}{a^2 b^2} (b^2 A \cos \theta + a^2 B \sin \theta) - R' \cos(2\theta + \eta) (\alpha \cos(\sqrt{3} \ln \alpha) + 1) + \\
& \quad + \frac{\alpha^2 \sqrt{3} \cos(2\theta)(a^2 - b^2) \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha))}{3a^2 b^2} - \alpha R' \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\alpha)) \cos(2\theta - \eta) + \\
& \quad + \left(\frac{a^2 + b^2}{6a^2 b^2} \right) (9 - 3\alpha^2) + \left(\frac{b^2 A^2 + a^2 B^2}{6a^2 b^2} \right) (12(1 - \ln(\alpha))) + \frac{6}{a^2 b^2} (Ba^2 \cos(\theta) + Ab^2 \sin(\theta)) + \\
& \quad + \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \right) \cos(2\theta).
\end{aligned} \tag{10}$$

В § 1.2 исследовано деформированное состояние неоднородной трубы. В п. 1 данного параграфа предполагается, что имеет место (1). Материал считается несжимаемым, коэффициент Пуассона равен $\mu = 0.5$.

Компоненты перемещения в первом приближении в упругой области имеет вид:

$$\begin{aligned}
u_\rho^{(I)e} &= -\frac{1}{4}(\alpha^2 - 1)(-3\beta^4 + \rho^4) \left(\frac{c \cos(\zeta) + d \sin(\zeta)}{\rho^2 E (\beta^4 - 1)} \right) + \\
& + \frac{\beta}{E} \left(-3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \cos(2\theta) + b_2'' \sin(2\theta)) + \\
& + \frac{\beta}{E} \left(-3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} - 2\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 + 4\tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (-a_2''' \sin(2\theta) + b_2''' \cos(2\theta)),
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
u_\theta^{(I)e} &= -\frac{1}{4}(\alpha^2 - 1)(3\beta^4 + 11\rho^4) \left(\frac{-c \sin(\theta) + d \cos(\theta)}{\rho^2 E (\beta^4 - 1)} \right) + \\
& + \frac{\beta}{E} \left(3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2'' \sin(2\theta) - b_2'' \cos(2\theta)) + \\
& + \frac{\beta}{E} \left(3\tilde{c}_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right) + 3\tilde{c}_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-3} + 7\tilde{c}_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^3 - \tilde{c}_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-1} \right) (a_2''' \cos(2\theta) + b_2''' \sin(2\theta)).
\end{aligned} \tag{12}$$

В пластической области определено в виде:

$$\begin{aligned}
u_\rho^{(I)p} &= u_\rho^{(I)p}{}_{odn} - C \left(2\rho (\ln \rho)^2 - \frac{\alpha^2}{2\rho} \right) (c \cos(\theta) + d \sin(\theta)) - \\
& - \frac{1}{\rho} (d_2 \ln \rho + d_1) (\cos(\theta) + \sin(\theta)) - \frac{2 \left([S \sin(\omega) + T \cos(\omega)] + Q\rho \right)}{\rho^2} \cos(2\theta + \zeta),
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
u_{\theta}^{(I)p} = & u_{\theta}^{(I)p}{}_{odn} + C \left[\frac{\alpha^2}{2\rho^2} + 2(\ln(\rho))^2 + 4\ln(\rho) \right] \cdot \\
& \cdot (c \sin(\theta) - d \cos(\theta)) + d_2 (\sin(\theta) - \cos(\theta)) + \\
& + (d_2 \ln(\rho) + d_1) (\sin(\theta) - \cos(\theta)) - \\
& - \frac{\left((S + T\sqrt{3}) \sin(\omega) + (T - S\sqrt{3}) \cos(\omega) \right)}{\rho^2} \sin(2\theta + \zeta),
\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
u_{\rho}^{(I)p}{}_{odn} = & -(\check{c}_{11} + \check{c}_{12} \ln(\rho)) \cos(\theta) - (\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12} \ln(\rho)) \sin(\theta) - \\
& - 2 \left\{ \left[c_{11} \cos(\sqrt{3} \ln(\rho)) + c_{12} \sin(\sqrt{3} \ln(\rho)) \right] \sin(2\theta) - \right. \\
& \left. - \left[c_{21} \cos(\sqrt{3} \ln(\rho)) + c_{22} \sin(\sqrt{3} \ln(\rho)) \right] \cos(2\theta) \right\},
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
u_{\theta}^{(I)p}{}_{odn} = & (\check{c}_{11} + \check{c}_{12} (1 + \ln(\rho))) \sin(\theta) + (\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12} (1 + \ln(\rho))) \cos(\theta) + \\
& + \left[c_{11} (\cos(\sqrt{3} \ln(\rho)) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\rho))) + c_{12} (\sin(\sqrt{3} \ln(\rho)) + \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln(\rho))) \right] \sin(2\theta) + \\
& + \left[c_{21} (\cos(\sqrt{3} \ln(\rho)) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln(\rho))) + c_{22} (\sin(\sqrt{3} \ln(\rho)) + \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln(\rho))) \right] \cos(2\theta).
\end{aligned} \tag{16}$$

В п. 2. предполагается, что имеет место (9). Определены компоненты перемещения в первом приближении в упругой и пластической областях.

Глава вторая посвящена исследованию предельного состояния многослойных труб, находящихся под действием внутреннего давления.

В § 2.1 исследовано предельное состояние многослойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления p (рисунок 2)

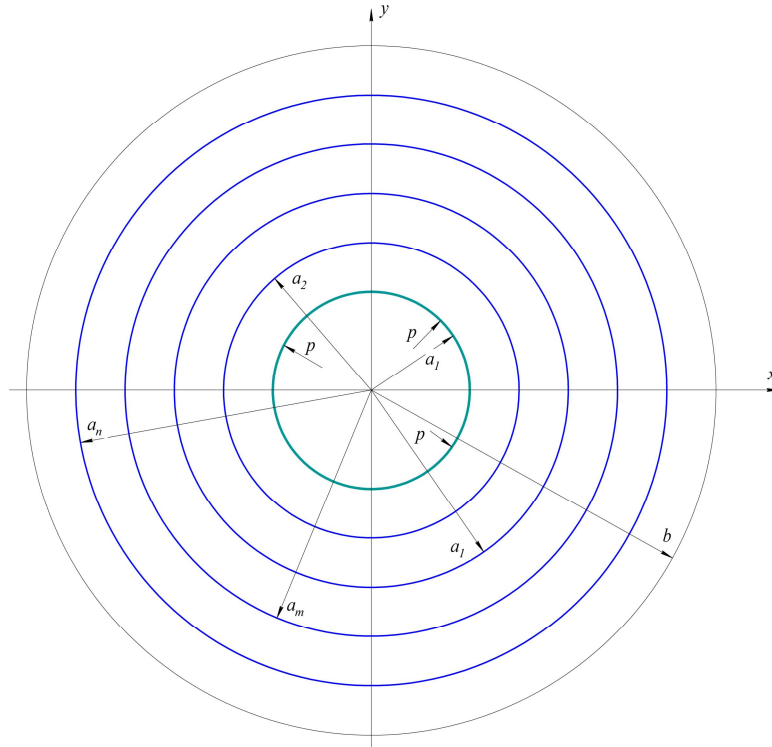


Рисунок 2

Предельное состояние для n – го слоя имеет вид:

$$\left(\frac{\sigma_{xn} - \sigma_{yn}}{2} - \frac{k_{1n} - k_{2n}}{2} \right)^2 + (\tau_{xyn} - k_{3n})^2 = k_n^2, \quad (17)$$

где $k_{1n}, k_{2n}, k_{3n}, k_n - const, n = 1, 2, \dots, m$

Определено предельное состояние в n -ом слое в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{pn}^{(I)p} &= a_1^n \cos(2\theta) + a_2^n \sin(2\theta), \\ \sigma_{\theta n}^{(I)p} &= b_1^n \cos(2\theta) + b_2^n \sin(2\theta), \\ \tau_{p\theta n}^{(I)p} &= c_1^n \cos(2\theta) + c_2^n \sin(2\theta), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} a_1^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [b_1^{n-1} + R'_n \cos(\zeta_n)] \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) + \right. \\ &+ [a_1^{n-1} - R'_n \cos(\zeta_n)] \left[\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right] + \\ &\quad \left. + R'_n \cos(\zeta_n), \right. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} a_2^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [b_2^{n-1} + R'_n \sin(\zeta_n)] \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) + \right. \\ &+ [a_2^{n-1} + R'_n \cos(\zeta_n)] \left[\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right] - \\ &\quad \left. - R'_n \sin(\zeta_n), \right. \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} b_1^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [c_1^{n-1} + R'_n \cos(\zeta_n)] \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) + \right. \\ &+ [c_1^{n-1} - R'_n \cos(\zeta_n)] \left[\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right] - \\ &\quad \left. - R'_n \cos(\zeta_n), \right. \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} b_2^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} [c_2^{n-1} + R'_n \sin(\zeta_n)] \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) + \right. \\ &+ [c_2^{n-1} + R'_n \sin(\zeta_n)] \left[\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right] + \\ &\quad \left. + R'_n \sin(\zeta_n), \right. \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} c_1^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{-2\sqrt{3}}{3} [a_2^{n-1} + R'_n \sin(\zeta_n)] \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) + \right. \\ &+ [b_2^{n-1} + R'_n \sin(\zeta_n)] \left[\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right] - \\ &\quad \left. - R'_n \sin(\zeta_n), \right. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
c_2^n &= \frac{\alpha_n}{\rho} \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} \left[a_2^{n-1} - R'_n \cos(\zeta_n) \right] \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) + \right. \\
&+ \left. \left[b_2^{n-1} + R'_n \cos(\zeta_n) \right] \left[\cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha_n} \right) \right] - \right. \\
&\quad \left. - R'_n \cos(\zeta_n) \right\}.
\end{aligned} \tag{24}$$

В § 2.2 исследовано предельное состояние многослойной неоднородной трубы. Для n – го слоя предел текучести имеет вид:

$$Z_n \left(\sigma_{xn} - \sigma_{yn} \right)^2 + 4B_n \tau_{xyn}^2 = 4k_n^2, \tag{25}$$

где

$A_n, B_n - const, n = 1, 2, \dots, t, k_n = k_0 + \delta(c_n x + d_n y), k_0, c_n, d_n - const,$

Определены компоненты напряжений в виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho n}^{(I)} &= C_{00}^{(n)} + \frac{C_{11}^{(n)}}{\rho} \cos(\theta + \theta_0) + \frac{\bar{C}_{11}^{(n)}}{\rho} \sin(\theta + \theta_0) + \\
&\frac{1}{\rho} \sum_{m=2} \left\{ C_{m1}^n \left[(1 - m^2) \cos \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho) \right) - \left(\sqrt{m^2 - 1} \right) \sin \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho) \right) \right] + \right. \\
&+ \left. C_{m2}^{(n)} \left[\sqrt{m^2 - 1} \cos \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho) \right) + (1 - m^2) \sin \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho) \right) \right] \right\} \cos(m\theta + \theta_0) + \\
&+ \rho \left(c_n \cos(\theta) + d_n \sin(\theta) \right) + G_n \ln(\rho) - \frac{7}{8} H_n \cos(4\theta),
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta n}^{(I)} &= C_{00}^{(n)} + \frac{C_{11}^{(n)}}{\rho} \cos(\theta + \theta_0) + \frac{\bar{C}_{11}^{(n)}}{\rho} \sin(\theta + \theta_0) + \\
&\frac{1}{\rho} \sum_{m=2} \left\{ C_{m1}^n \left[(1 - m^2) \cos \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho) \right) - \left(\sqrt{m^2 - 1} \right) \sin \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho) \right) \right] + \right. \\
&+ \left. C_{m2}^{(n)} \left[\sqrt{m^2 - 1} \cos \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho) \right) + (1 - m^2) \sin \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho) \right) \right] \right\} \cos(m\theta + \theta_0) + \\
&+ 3\rho \left(c_n \cos(\theta) + d_n \sin(\theta) \right) + G_n (1 + \ln(\rho)) + \frac{1}{8} H_n \cos(4\theta),
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\rho\theta n}^{(I)} &= \frac{C_{11}^{(n)}}{\rho} \sin(\theta + \theta_0) - \frac{\bar{C}_{11}^{(n)}}{\rho} \cos(\theta + \theta_0) + \frac{1}{\rho} \sum_{m=2} \left(m\sqrt{m^2 - 1} \right) \times \\
&\times \left[-C_{m1}^{(n)} \sin \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho) \right) + C_{m2}^{(n)} \cos \left(\sqrt{m^2 - 1} \ln(\rho) \right) \right] \sin(m\theta + \theta_0) + \\
&+ \rho \left(c_n \cos(\theta) - d_n \sin(\theta) \right) + \frac{H_n}{4} \sin(4\theta),
\end{aligned} \tag{28}$$

где $C_{00}^{(n)}, C_{11}^{(n)}, \bar{C}_{11}^{(n)}, C_{41}^{(n)}, C_{42}^{(n)}, G_n, H_n$ найдены при известных значениях $\sigma_{ijn}^{(1)}$.

Глава третья посвящена решению краевой задачи теории упругости для полуполосы $\{\Pi : x \geq 0, |y| \leq 1\}$, защемлённой по продольным сторонам (рисунок 3) и нагруженной на торце. В виде рядов по функциям Фадля-Папковича впервые получено точное аналитическое решение

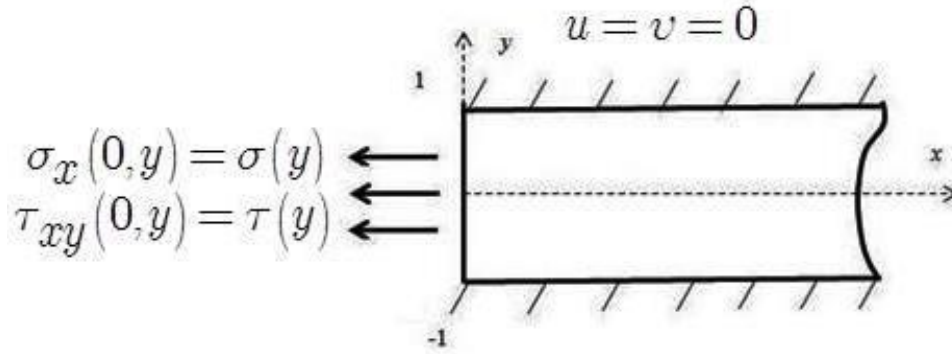


Рисунок 3

Итак, на длинных сторонах полуполосы $y = \pm 1$ имеем:

$$u(x, \pm 1) = v(x, \pm 1) = 0 \quad (29)$$

а на торце $x = 0$ заданы нормальные и касательные напряжения:

$$\sigma_x(0, y) = \sigma(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = \tau(y) \quad (30)$$

Окончательные выражения для напряжений и перемещений в полуполосе имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) = & \sigma_1 \frac{s_x(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{N_1} (1 - c_1 x) + \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{N_k} \left(\cos(b_k x) - c_k \frac{\sin(b_k x)}{b_k} \right) e^{c_k x} \right], \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, y) = & -\sigma_1 \frac{s_y(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{\lambda_1^2 N_1} (1 - c_1 x) c_1^2 - \\ & - \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\sigma_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 N_k} (\lambda_k \bar{\lambda}_k) \left(\cos(b_k x) + c_k \frac{\sin(b_k x)}{b_k} \right) e^{c_k x} \right], \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, y) = & -\sigma_1 \frac{t_{xy}(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{N_1 \lambda_1} c_1^2 x - \\ & - \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\sigma_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{N_k \lambda_k} (\lambda_k \bar{\lambda}_k) \frac{\sin(b_k x)}{b_k} e^{c_k x} \right], \end{aligned} \quad (33)$$

где числа

$$\lambda_k = c_k + ib_k \quad (k = 1, 2, \dots, \operatorname{Re} c_k < 0) -$$

комплексные корни уравнения

$$L(\lambda) = \frac{3 - \nu}{8\lambda} \sin(2\lambda) - \frac{1 + \nu}{4}, \quad (34)$$

числа

$$\begin{aligned} \sigma_k = & \int_{-1}^1 \sigma(y) x_k(y) dy, \quad N_k = \frac{\lambda_k M_k}{2}, \\ M_k = & \frac{\sin(2\lambda_k)(\nu - 3)}{8\lambda_k^2} - \frac{\cos(2\lambda_k)(\nu - 3)}{4\lambda_k}, \end{aligned} \quad (35)$$

$x_k(y) = \frac{\cos \lambda_k y}{4 \cos \lambda_k}$ - финитные части биортогональной к $s_x(\lambda_k, y)$ системы функций $X_k(y)$, элементы которой находятся, как решения уравнений ($k = 1, 2, \dots$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\lambda, y) X_k(y) dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}. \quad (36)$$

Здесь функции Фадля-Папковича:

$$s_x(\lambda_k, y) = \left[-\nu \cos \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k \right] \cos \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y,$$

$$s_y(\lambda_k, y) = \left[\frac{1+\nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k - \cos \lambda_k \right] \cos \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y, \quad (37)$$

$$t_{xy}(\lambda_k, y) = \left[\frac{\nu-1}{2} \cos \lambda_k + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k \right] \sin \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \cos \lambda_k y.$$

На рисунке 4, в качестве иллюстрации, показано распределение напряжений и график раскладываемой функции на торце полуполосы. На рисунках 5,6 показано распределение напряжений и перемещений в сечении $x = 0.02$ для ступенчатой самоуравновешенной нормальной нагрузки ($d = 0.2$). Касательная нагрузка на торце считалось равной нулю

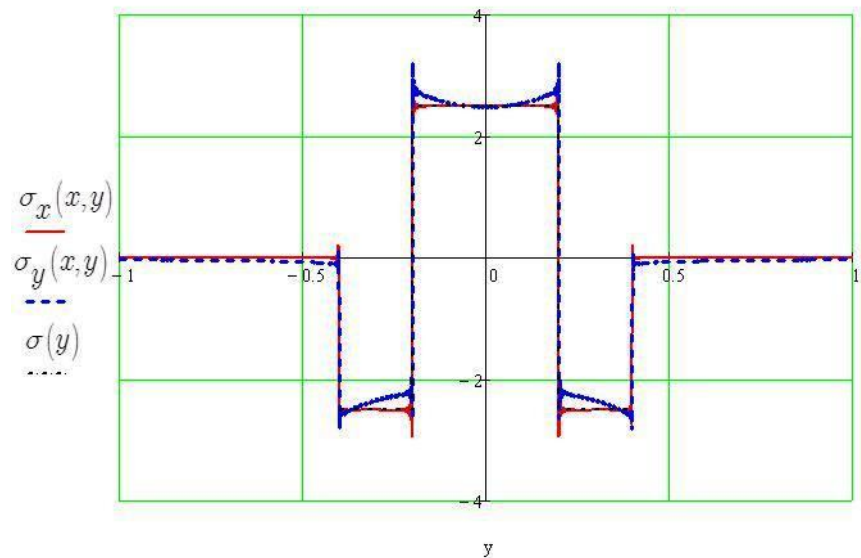


Рисунок 4

$$\sigma(y) = \begin{cases} \frac{1}{2d}, & |y| \leq d \\ -\frac{1}{2d}, & 2d \geq |y| > d \\ 0, & 2d < |y| \leq 1 \quad (0 < d < 1) \end{cases} \quad (38)$$

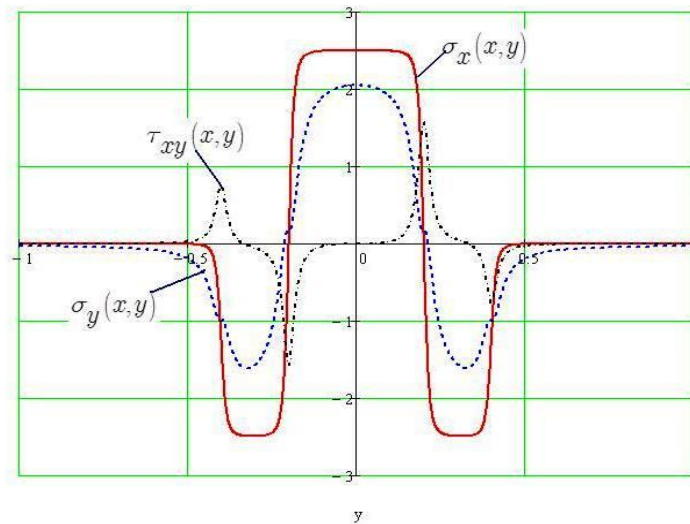


Рисунок 5

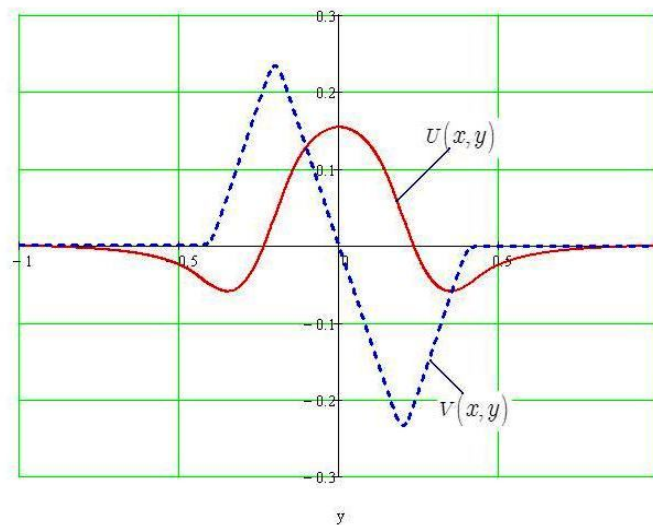


Рисунок 6

В *заключении* приводятся выводы, полученные в диссертационной работе, а также основные результаты.

Основные результаты и выводы диссертационной работы:

- 1) определено упругопластическое напряженное состояние неоднородной трубы при различных видах неоднородности
- 2) определено упругопластическое деформированное состояние неоднородной трубы при различных видах неоднородности
- 3) определено предельное состояние толстостенной многослойной трубы, в случае, когда каждый слой обладает своими параметрами анизотропии
- 4) определено предельное состояние толстостенной многослойной трубы, в случае, когда каждый слой обладает своими параметрами неоднородности;
- 5) определено точное аналитическое решение краевой задачи для полуполосы, защемленной по продольным сторонам.

Перспективы дальнейшей разработки темы: В первой и второй главах диссертации исследовано упругопластическое состояние толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления при различных видах неоднородности. Приближенно - аналитическим методом определено напряженно-деформированное состояние толстостенной трубы. Изучено влияние параметров неоднородности на положение упругопластической границы. Новые результаты, полученные в работе и учитывающие влияние неоднородности на напряженное состояние толстостенной трубы являются важными и актуальными. Методы решения, использованные в работе могут быть распространены не только на решение плоских, но и простран-

ственных задач. В третьей главе диссертации было впервые получено точное аналитическое решение классической краевой проблемы теории упругости для прямоугольника с двумя защемленными сторонами. Оно построено на основе теории разложений по функциям Фадля-Папковича, основы которой были опубликованы совсем недавно в работах. Проблема решения краевых задач теории упругости и пластичности в конечных канонических областях с угловыми точками границы и точками смены типа граничных условий относится к числу важнейших. Ее решение не удавалось найти почти 200 лет. В третьей главе достаточно подробно представлена техника решения краевой задачи в прямоугольнике. Эта техника может быть перенесена в цилиндрическую систему координат. И тогда задачи, рассмотренные в первых двух главах диссертации, могут быть решены для труб конечной длины, точные аналитические решения для которых пока не известны.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Никитин А. В., Миронов Б. Г. Предельное состояние многослойной анизотропной толстостенной трубы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 58–67.
2. Никитин А. В., Коваленко М. Д. Полуполоса, защемленная по продольным сторонам. Точное аналитическое решение // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 193–203.
3. Никитин А. В. Определение деформированного состояния толстостенной нелинейно-неоднородной трубы при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 1 (19). С. 60–70.
4. Никитин А. В., Тихонов С. В. Упругопластическое состояние трансляционно-анизотропной линейно-неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2013. № 4 (80). Ч. 2. С. 148–155.
5. Никитин А. В. Определение деформированного состояния толстостенной линейно-неоднородной трубы при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 3 (17). С. 142–150.
6. Никитин А. В., Кержаев А. П., Лапикова Е. С., Юринкина М. Н. Полуполоса с продольными ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие. Разложения Лагранжа // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 4 (18). С. 86–103.

Автореферат разрешен к печати диссертационным советом
Д 212. 300.02 при ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»
13.07.2015 г.

Подписано в печать 13.07.2015 г. Формат 60x84/16.

Бумага писчая. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ №2378

Отпечатано в отделе полиграфии
ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»
428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, д.38